METODY MATEMATYCZNE AUTOMATYKI I ROBOTYKI – ćwiczenie 3

Płaszczyzna fazowa, trajektorie fazowe i punkty równowagi systemów dynamicznych

1. Wyznacz współczynniki a_{21} i a_{22} macierzy stanu $A = [0\ 1; a_{21}\ a_{22}]$ liniowego systemu drugiego rzędu, dla których wartości własne tej macierzy będą równe p_1 i p_2.
2. Przeanalizuj `Skrypt31`. Kreśli on trajektorie fazowe dla systemu opisanego macierzą stanu z pkt. 1, z uwzględnieniem sześciu różnych par wartości p_1 i p_2, odpowiadających różnym rodzajom punktów równowagi. Dla każdego z przypadków rysowana jest rodzina trajektorii wychodzących z różnych punków początkowych, co pozwala na zaobserwowanie ich ogólnego przebiegu w otoczeniu punktu równowagi. Ten sposób kreślenia trajektorii fazowych będzie używany także w kolejnych punktach ćwiczenia.
3. Uruchom `Skrypt31` i zbadaj uzyskane wyniki:
   a) Czy $x = (0,0)$ jest zawsze jedynym możliwym punktem równowagi rozważanego systemu w przypadku, gdy $a_{21} \neq 0$?, uzasadnij odpowiedź.
   b) Wyjaśnij ogólny sposób określania kierunku przebiegu trajektorii fazowych dla modeli, dla których $\dot{x}_1 = x_2$. Wskaż kierunki trajektorii fazowych na wszystkich uzyskanych wykresach.
   c) Rozpoznaj i nazwij typy punktów równowagi widocznych na wykresach. Podziel je na (asymptotycznie) stabilne i niestabilne. Uzupełnij tymi informacjami opisy wykresów zawarte w zmiennej `titles`.
4. Rozważ model wahadła tłumionego opisanego równaniem $\ddot{\varphi} + 2\xi\omega_n\dot{\varphi} + {\omega_n}^2 \sin\varphi = 0$. Zapisz jego równania stanu, przyjmując $x_1 = \varphi,\ x_2 = \dot{\varphi}$. Wyznacz stany równowagi rozważanego systemu i ich typy:
   a) Przedstaw ogólną metodę wyznaczania punktów równowagi układu na podstawie równań stanu. Czy w tej metodzie istotna jest liniowość modelu i dlaczego?
   b) Przedstaw ogólną metodę określania typu stanu równowagi. Czy wymaga ona modelu liniowego i dlaczego? Jak należy postępować, gdy dany jest model nieliniowy?
   c) Stosując omówione metody, oblicz położenia i określ typy punktów równowagi.
   d) Czy uzyskane położenia punktów równowagi zależą od wartości parametrów modelu ξ i ω_n?, dlaczego? Skonfrontuj wniosek z oczekiwanym zachowaniem rzeczywistego wahadła. Czym w praktyce są poszczególne punkty równowagi, dlaczego są one równo oddalone na osi X_1, dlaczego mają naprzemiennie dwa typy i dlaczego jest ich nieskończenie wiele?
   e) Podaj warunek wystarczający na to, aby wszystkie punkty równowagi systemu drugiego rzędu leżały na osi X_1 płaszczyzny fazowej i udowodnij jego poprawność.
5. Przeanalizuj `Skrypt32`, który kreśli trajektorie fazowe dla rozważanego modelu wahadła. Wyjaśnij potrzebę i sposób wykorzystania funkcji `ode45`. Uruchom skrypt i zweryfikuj przebieg trajektorii fazowych, w szczególności zgodność położeń punktów równowagi z wcześniejszymi obliczeniami. Sprawdź przebieg trajektorii dla różnych wartości parametrów i oceń, czy wpływ parametrów jest zgodny z oczekiwaniami.
6. Określ położenia i typy punktów równowagi systemu nieliniowego opisanego równaniami stanu $\dot{x}_1 = {x_1}^2 + {x_2}^2 - 4,\ \ \dot{x}_2 = {x_1}^2 - {x_2}^2 + 2x_1$. Zastosuj metody wykorzystane w poprzednich punktach. Wykonaj działania bez użycia komputera lub ograniczając je do elementarnych obliczeń numerycznych.

7. Przeanalizuj `Skrypt33`, który rysuje trajektorie fazowe i oznacza stany równowagi dla systemu opisanego w poprzednim punkcie:
   a) Zauważ, że cały proces wyznaczania położeń i typów stanów równowagi można z dużym poziomem ogólności przełożyć na algorytm łączący obliczenia symboliczne i numeryczne. Wyjaśnij, jak zostało to wykonane w przypadku rozważanego skryptu (niezbędny jest Symbolic Math Toolbox).
   b) Skrypt generuje dwa wykresy. Na pierwszym rysowana jest rodzina trajektorii fazowych dla różnych warunków początkowych, podobnie jak w poprzednich przykładach. Drugi wykres prezentuje ten sam portret fazowy, lecz otrzymany z pomocą funkcji `quiver`. Jakie są różnice tych dwóch sposobów prezentacji? Jakie cechy trajektorii są (lepiej) ukazywane w każdym z przypadków? Dlaczego wykres wygenerowany przy użyciu funkcji `quiver` może być szczególnie przydatny w przypadku modeli, których pierwsze równanie stanu nie ma postaci $\dot{x}_1 = x_2$?
   c) Sprawdź, czy przebieg wykreślonych trajektorii fazowych potwierdza obliczenia dotyczące położeń i typów punktów równowagi.
8. Przygotuj skrypt, który wykreśli rodzinę trajektorii w przestrzeni stanu dla układu liniowego drugiego rzędu, gdzie $\dot{x}_1 = x_2$ oraz x_1 będzie odpowiedzią transmitancji $G_a(s) = k/s^2$ lub $G_b(s) = k/\big(s(Ts+1)\big)$ na skok sterowania o amplitudzie U:
   a) Sprawdź uzyskiwane trajektorie dla różnych wartości parametrów U, k, T, w szczególności również dla różnych znaków U. Określ kierunki przebiegu trajektorii.
   b) Zauważ, że w przypadku transmitancji $G_b(s)$, wartość ${x_2}^* = Uk$ wiąże się ze szczególną cechą przebiegu trajektorii względem osi X_2. Na czym ona polega? Zaobserwuj charakterystyczne kształty trajektorii zależnie od znaku sterowania U oraz relacji pomiędzy ${x_2}^*$ i wartością początkową zmiennej x_2. Opanuj odręczne szkicowanie trajektorii uwzględniające jej cechy charakterystyczne, bez pomocy komputera.
   c) Wyjaśnij, jakie rzeczywiste urządzenia automatyki i charakteryzujące ich działanie sygnały reprezentują rozważane modele. Czy wyniki symulacji są zgodne z praktycznie obserwowanymi własnościami tych urządzeń?
9. Wyprowadź analitycznie równanie trajektorii fazowej dla transmitancji $G_a(s)$, przechodzącej przez punkt $x_0 = (x_{10}, x_{20})$, przy pozostałych założeniach jak w pkt. 8. Równanie powinno mieć postać $x_1 = f(x_2)$. Sprawdź, czy własności analityczne równania w zakresie wpływu parametru k i znaku U są zgodne z zaobserwowanymi wcześniej wynikami symulacji. Sprawdź zgodność modelu analitycznego i symulacyjnego przez nałożenie dwóch odpowiadających sobie trajektorii na wspólny wykres.
10. Wyjaśnij, w jaki sposób ulegnie zmianie kształt trajektorii fazowej dotyczącej modelu $G_a(s)$ po narzuceniu ograniczenia $|x_2| \le {x_2}^{\lim} = const$. Co w praktyce oznacza takie ograniczenie, czy jest ono realistyczne w przypadku urządzeń automatyki? Opanuj odręczne szkicowanie rozważanej trajektorii wraz z uwzględnieniem ograniczenia wartości zmiennej stanu x_2.
11. Analityczny opis trajektorii fazowej opartej na odpowiedzi skokowej transmitancji $G_b(s)$, przechodzącej przez punkt $x_0 = (x_{10}, x_{20})$, ma postać równania

$$x_1 = x_{10} - T\left((x_2 - x_{20}) + Uk\ln\frac{x_2 - Uk}{x_{20} - Uk}\right)$$

    Sprawdź zgodność modelu analitycznego i symulacyjnego przez nałożenie dwóch odpowiadających sobie trajektorii na wspólny wykres.