METODY MATEMATYCZNE AUTOMATYKI I ROBOTYKI – ćwiczenie 4

Analiza stabilności układów dynamicznych z wykorzystaniem drugiej metody Lapunowa

1. Dany jest nieliniowy system dynamiczny opisany równaniami stanu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_1 {x_2}^2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 - {x_1}^2 x_2 \end{cases}$$

   a) Wyznacz wszystkie stany równowagi systemu.

   b) Zbadaj stabilność stanów równowagi wykorzystując drugą metodę Lapunowa. Wydedukuj postać funkcji Lapunowa $V(x)$ na podstawie równań systemu wiedząc, że należy dążyć do uzyskania ujemnie lub przynajmniej niedodatnio określonej funkcji $\dot{V}(x)$.

   c) Dokonaj linearyzacji równań systemu w otoczeniu stanów równowagi i zbadaj ich stabilność przy użyciu pośredniej metody Lapunowa. Porównaj wynik z uzyskanym w pkt. 1b).

2. Dane jest wahadło swobodne w postaci masy punktowej m umocowanej na końcu nieważkiego, nierozciągliwego i nieściśliwego pręta o długości r, poruszającego się w stałej płaszczyźnie pionowej wokół nieruchomego drugiego końca. Zmienna θ reprezentuje odchylenie kątowe wahadła od dolnego położenia pionowego. Energia ruchu wahadła jest rozpraszana przez siłę oporu $d\dot{\theta}$, przy czym $d \geq 0$.

   a) Przyjmując $x_1 = \theta$ i $x_2 = \dot{\theta}$, wyprowadź równania stanu wahadła.

   b) Udowodnij, że stany $\tilde{x} = (2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, są stanami równowagi systemu wykazującymi jednakowe własności pod względem stabilności lokalnej.

   c) Zbadaj możliwość wykorzystania całkowitej energii mechanicznej wahadła $E(x_1, x_2)$ jako funkcji Lapunowa dla stanów równowagi $\tilde{x}$. Rozważ wariant stabilności zwykłej i asymptotycznej oraz przypadek ruchu nietłumionego ($d = 0$) i tłumionego ($d > 0$).

   d) Uogólnij zaproponowaną wyżej funkcję Lapunowa do postaci $E(x_1, x_2) + a{x_1}^2 + bx_1x_2 + c{x_2}^2$. Czy można z jej użyciem uzyskać wnioski mocniejsze, niż poprzednio, przy odpowiednim doborze współczynników a, b i c?

   e) Zbadaj stabilność lokalną stanów $\tilde{x}$ dla ruchu nietłumionego i tłumionego za pomocą pośredniej metody Lapunowa. Podobne zadanie było już szczegółowo rozwiązywane wcześniej.

   f) Z zasady zachowania energii wynika bezpośrednio, że stany $\tilde{x}$ są lokalnie stabilne, a w przypadku ruchu tłumionego, stabilne asymptotycznie. Porównaj ten prosty wniosek z wynikami uzyskanymi w trzech poprzednich podpunktach.